TENTAMEN
Talen en Automaten
27 augustus 1998; 09.00 – 12.00 uur

Je mag gebruik maken van alle stellingen uit het diktaat en van resultaten van opgaven die we deze cursus op het werkcollege hebben behandeld. Geef steeds duidelijk aan wat je gebruikt!

Opgave 1

- Geef de definitie van een contextvrije grammatica.
- Geef de defintie van een deterministische eindige automaat (DFSA).
- Geef de definitie van een recursieve taal.

Opgave 2

Laat in deze opgave $A = \{0, 1\}$.
De taal $L_0 \subseteq A^*$ wordt gegeven door de reguliere expressie

$$(0^*1^*0^*1^*)^* \; 0^*1^*0^*$$

- Construeer een minimale DFSA voor L_0.
- Geef een reguliere expressie voor $\overline{L_0}$ (het complement van L_0 binnen A^*).

Een string van A^* kunnen we opvatten als de binaire codering van een natuurlijk getal. Bij $x \in A^*$ noteren we het met x geassocieerde natuurlijke getal als $\langle x \rangle$, waarbij we afspreken dat $\langle \varepsilon \rangle = 0$.
De taal L_1 wordt gedefinieerd door

$$L_1 = \{x \in A^* \mid \langle x \rangle \textbf{ mod } 3 = 1\}$$

- Geef een DFSA voor de taal L_1. Beargumenteer duidelijk je oplossing; we vragen geen formeel bewijs.
- Geef een DFSA voor de taal $\mathcal{T}(M_0) \cap L_1$. Beargumenteer duidelijk je oplossing; we vragen geen formeel bewijs.
- Laat nu $M = (K_0, T, k_0, t_0, F_0)$ en $N = (K_1, T, k_1, t_1, F_1)$ twee DFSA's met totale overgangsfunctie zijn.
  Construeer (formeel) een DFSA voor de taal $\mathcal{T}(M) \cap \mathcal{T}(N)$ en bewijs de correctheid van je constructie.

Opgave 3

Laat $L \subseteq \{a, b\}^*$ de taal zijn gedefinieerd door

$$z \in L \quad \equiv \quad \exists(x, y \in \{a, b\}^* :: z = xby \wedge \#a.x = \#a.y)$$

- Is L regulier? Bewijs de correctheid van je antwoord.
- Geef een contextvrije grammatica G voor L.
  Beargumenteer je antwoord; we vragen geen formeel bewijs.
- Geef bij de gevonden grammatica G afleidingsbomen voor de strings *babbbabb* en *abababaaa*.

Opgave 4

Gegeven het volgende probleem:

Injectieprobleem voor Turingmachines (InjTM)
Parameter: een Turingmachine M met invoer- en uitvoeralfabet T.
Gevraagd: Is $\mathcal{F}_M$ een injectie?

Is (**InjTM**) beslisbaar? Bewijs je bewering.
Ter herinnering: een functie $f : A \to B$ heet een injectie als

$$\forall(x, y \in A :: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Opgave 5

Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn. Een verzameling $W \subseteq V$ heet een *onafhankelijke verzameling* d.e.s.d. als

$$\forall(x, y \in V : x \in W \wedge y \in W : (x, y) \notin E)$$

Gegeven is nu het probleem

Independent Set (INDEP)
Parameter: Een graaf G en een natuurlijk getal N.
Gevraagd: Bevat G een onafhankelijke verzameling met minstens N elementen?

Toon aan: (**INDEP**) $\in$ **NPC**

einde

TENTAMEN

Talen en Automaten

29 februari 2000; 09.00 – 12.00 uur

Je mag gebruik maken van alle stellingen uit het diktaat en van resultaten van opgaven die we deze cursus op het werkcollege hebben behandeld. Geef steeds duidelijk aan wat je gebruikt!

Opgave 1

- Geef de definitie van een contextvrije grammatica (CFG).
- Geef de definitie van een nondeterministische eindige automaat (NFSA).
- Geef de definitie van de klasse **NP** .

Opgave 2

Gegeven is de grammatica $G = (\{S, A, B\},\ \{a, b\},\ P,\ S)$ met P gegeven door de productieregels

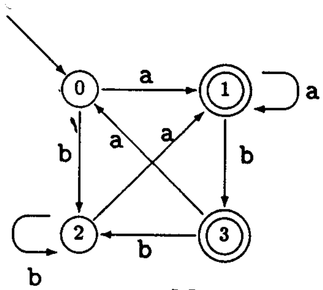
$$\begin{array}{lcl} S & \to & AB \mid BAb \\ A & \to & aA \mid b \\ B & \to & bB \mid a \end{array}$$

- Is $\mathcal{L}(G)$ regulier?
  Zo ja, construeer dan een DFSA voor $\mathcal{L}(G)$
  Zo nee, bewijs dan je bewering.

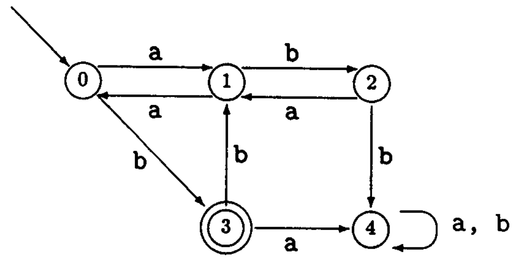
lees verder

Opgave 3

Gegeven zijn twee DFSA's M_1 en M_2, gerepresenteerd door de volgende figuren



M_1



M_2

- Geef een reguliere expressie voor $\mathcal{T}(M_2)$.

Als L_1 en L_2 twee talen zijn over het alfabet T, dan verstaan we onder $\langle L_1|L_2\rangle$ de taal

$$\langle L_1|L_2\rangle = \{x \in T^* \mid x \in L_1 \;\wedge\; \exists\,(y \in T^* :: xy \in L_2)\}$$

- Geef van elk van de volgende strings aan of ze behoren tot de taal $\langle \mathcal{T}(M_1)|\mathcal{T}(M_2)\rangle$. Beargumenteer je antwoord.

aaa	aab	bbbababab
bbb	aabaab	babbabaab

Laat nu $M_1 = (K_1, T, t_1, k_1, F_1)$ en $M_2 = (K_2, T, t_2, k_2, F_2)$ twee minimale DFSA's zijn met hetzelfde invoeralfabet T.

- Construeer (formeel) een DFSA voor de taal $\langle \mathcal{T}(M_1)|\mathcal{T}(M_2)\rangle$. Geef aan waar je gebruik maakt van de minimaliteit.

Opgave 4

Gegeven is de grammatica $G = (\{S, A, B, C\},\ \{a, b, c\},\ P,\ S)$ met P gegeven door

$$\begin{array}{lcrcrcl} S & \to & bSb & \mid & aA & & \\ A & \to & aB & \mid & aCC & \mid & c \\ B & \to & bB & \mid & cSc & & \\ C & \to & aSC & \mid & ac & & \end{array}$$

- Bewijs dat $\mathcal{L}(G)$ niet regulier is.
- Toon aan dat $\mathcal{L}(G)$ deterministisch is door een DPDA voor deze taal te ontwerpen. Licht je constructie duidelijk toe.
  HINT: introduceer een aantal nieuwe nonterminale symbolen en herschrijf de grammatica. Dit is één van de manieren waarop het zou kunnen. Je mag ook natuurlijk best een andere route kiezen.

Opgave 5

In deze opgave bekijken we het volgende beslissingsprobleem

Vier-dimensionale matching (4DM)
Parameter: vier disjuncte eindige verzamelingen A, B, C en D met $|A| = |B| = |C| = |D|$ en een verzameling $G \subseteq A \times B \times C \times D$ van viertupels
Gevraagd: bevat G een vierdimensionale matching van $A \times B \times C \times D$?

Een vierdimensionale matching is (analoog aan de behandelde driedimensionale matching) een verzameling van viertupels zo, dat elk element van de verzamelingen A, B, C en D in precies één tupel voorkomt.

- Geef een ja-instantie van (4DM)
- Geef een nee-instantie van (4DM)
- Bewijs: (4DM) $\in$ **NPC**

einde

TENTAMEN
Talen en Automaten
24 augustus 2000;09.00 – 12.00 uur

Je mag gebruik maken van alle stellingen uit het diktaat en van resultaten van opgaven die we deze cursus op het werkcollege hebben behandeld. Geef steeds duidelijk aan wat je gebruikt!

Opgave 1

Onder het symmetrisch verschil $V \bowtie W$ van twee verzamelingen V en W verstaan we de verzameling

$$V \bowtie W = \{x \mid (x \in V \ \wedge \ x \notin W) \ \vee \ (x \notin V \ \wedge \ x \in W)\}$$

□ 1. Bewijs: Als L_0 en L_1 reguliere talen zijn, dan is ook $L_0 \bowtie L_1$ een reguliere taal.

Laat $G = (\{S, A, B\}, \ \{a, b\}, \ P, \ S)$ een reguliere grammatica zijn met P gegeven door de volgende productieregels:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \mid bB \\ A & \rightarrow & bA \mid aB \\ B & \rightarrow & aS \mid \varepsilon \end{array}$$

□ 2. Geef een reguliere expressie voor de taal $\mathcal{L}(G)$.

Laat $M = (\{0, 1\}, \ \{a, b\}, \ t, \ 0, \ \{1\})$ een eindige automaat zijn met t gegeven door

$$t(0, a) = 0, \ \ t(0, b) = 1, \ \ t(1, a) = 1, \ \ t(1, b) = 0$$

□ 3. Construeer een DFSA voor de taal $\mathcal{L}(G) \bowtie \mathcal{T}(M)$.

□ 4. Laten nu $M_0 = (K_0, T, t_0, b_0, F_0)$ en $M_1 = (K_1, T, t_1, b_1, F_1)$ twee willekeurige DFSA's zijn met totale overgangsfunctie.
Construeer formeel een DFSA $M_{\bowtie}$ met de eigenschap $\mathcal{T}(M_{\bowtie}) = \mathcal{T}(M_0) \bowtie \mathcal{T}(M_1))$

Laat nu

$$\begin{array}{lcl} V & = & \{a^n b^m c^k \mid n = m\} \\ W & = & \{a^n b^m c^k \mid m \neq k\} \end{array}$$

□ 5. Geef een contextvrije grammatica voor V

□ 6. Geef een contextvrije grammatica voor W

□ 7. Beschrijf de taal $V \bowtie W$

□ 8. Is $V \bowtie W$ een contextvrije taal? Beargumenteer duidelijk je antwoord; we vragen geen formeel bewijs.

□ 9. Construeer een Turingmachine voor de taal $V \bowtie W$. Licht je werkwijze toe.

lees verder

Opgave 2

Gegeven het volgende beslissingsprobleem:

> **Identiteitsprobleem voor Turingmachines (IdTM)**
> **Parameter:** een Turingmachine M met invoeralfabet T.
> **Gevraagd:** $\mathcal{F}_M = id$, d.w.z. $\forall\,(x \in T^* :: \mathcal{F}_M(x) = x)$?

☐ 10. Is (IdTM) beslisbaar? Bewijs je bewering.

Opgave 3

Twee grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ en $G_2 = (V_2, E_2)$ heten *isomorf* als er een totale bijectie $f : V_1 \to V_2$ bestaat met de eigenschap dat

$$\forall\,(x, y \in V_1 :: (x, y) \in E_1 \equiv (f(x), f(y)) \in E_2)$$

Gegeven is nu het volgende probleem

> **Subgraaf-isomorfisme (SUBISOM)**
> **Parameter:** twee ongerichte grafen G en H.
> **Gevraagd:** bevat G een subgraaf die isomorf is met H?

☐ 11. Geef een ja-instantie van (SUBISOM).
☐ 12. Geef een nee-instantie van (SUBISOM).
☐ 13. Beargumenteer dat (SUBISOM) $\in$ NP.
☐ 14. Er kan bewezen worden dat (SUBISOM) $\in$ NPC door gebruik te maken van het feit dat (CLIQUE) $\in$ NPC. Beschrijf in welke richting de reductie gaat en wat de bewijsverplichtingen zijn.
☐ 15. Bewijs dat (SUBISOM) $\in$ NPC.

einde